Отзыв

официального оппонента на диссертацию Белоусова Федора Анатольевича на тему «К вопросу о существовании и единственности периодических решений для дифференциальных уравнений», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» и 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Диссертация посвящена изучению периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений различных классов. Периодические решения играют важную роль как в качественной теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, так и во многих ее приложениях. Теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена обширная литература, в которой отражены основные методы исследования периодических решений – принцип сжимающих отображений, метод точечных отображений Пуанкаре - Андронова, метод интегральных уравнений, метод направляющих функций Красносельского, топологический метод, метод усреднения Крылова-Боголюбова и другие. В последние десятилетия интенсивно развивалась и теория функционально-дифференциальных уравнений. Это было вызвано многочисленными приложениями в математической экономике, в задачах управления техническими системами, в задачах популяционной динамики и т.д. Имеется немалое число работ и по исследованию периодических решений функционально-дифференциальных уравнений различных классов. В частности, исследованию периодических решений для класса уравнений, близкого к рассмотренному в диссертации, посвящены недавние работы Л.А. Поляковой. Однако в основной части отмеченных работ предлагаемые условия существования периодических решений являются сложными и трудно проверяемыми на практике. Подход, развиваемый в рецензируемой работе, позволяет обойти эти сложности и получить существенно более простые и конструктивные условия. Кроме того, следует отметить, что задача о периодических решениях функционально-дифференциальных уравнений точечного типа существенно сложнее аналогичной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и потому мало изучена. Любые новые результаты для этого класса уравнений представляют немалый научный интерес. Таким образом, тема диссертации Ф.А. Белоусова актуальна, она находится в русле современных исследований.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы, содержащего 89 наименований работ. Объем работы составляет 114 страниц машинописного текста.

Во введении обоснована актуальность рассмотренных в диссертации задач, дан краткий обзор наиболее близких к теме диссертации публикаций и сформулированы основные результаты работы.

В главе 1 рассматривается нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейной правой частью

$$\dot{x}(t) = g(t, x),$$

где $g(t, x)$ – непрерывная по (t, x) и периодическая по t вектор-функция.

Эта глава состоит из пяти разделов и посвящена получению простых и конструктивных условий, сформулированных в терминах правых частей рассматриваемой системы уравнений и обеспечивающих существование и единственность периодического решения. Достигается эта цель с помощью специальной линеаризации правой части данной системы уравнений. При этом в частности, выясняется, что тейлоровская линеаризация не всегда является лучшей линеаризацией для поиска периодического решения. Для скалярных дифференциальных уравнений первого порядка предлагается способ оптимального, с точки зрения предлагаемого в диссертационной работе подхода, выделения линейной части. Последовательно рассматриваются линеаризации вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x + f(t, x)$$

для трех случаев матрицы коэффициентов $A(t)$ —постоянной скалярной матрицы $A(t) \equiv aE$, переменной скалярной матрицы $A(t) = a(t)E$ с заданным периодом и произвольной постоянной невырожденной матрицы $A(t) \equiv A$. Во всех трех случаях сформулированы условия, обеспечивающие существование и единственность периодического решения. Полученные условия, выражаются только через константу Липшица для функции f и норму обратного к линеаризованному оператора (оператора периодических решений) в пространстве непрерывных периодических функций. При этом в первых двух случаях указанная норма находится явно, а в третьем случае с помощью нетривиальных геометрических представлений удается получить точную и конструктивную оценку этой нормы. Особенно просто достаточное условие существования периодического решения выглядит в первом случае: $L_f / |a| < 1$, где L_f — константа Липшица функции f.

В главе 2 рассматривается скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

с непрерывной по всем переменным и периодической по t правой частью.

Это уравнение и его линеаризация рассматривается как особый частный случай матричной линеаризации нелинейной системы уравнений. Найдены достаточные условия существования и единственности периодического решения, выраженные через коэффициенты линеаризации и константу Липшица нелинейной части. В случае n=2 эти условия удается выписать в более простом виде.

В главе 3 изучаются функционально-дифференциальные системы уравнений точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_s)),$$

где g – непрерывно дифференцируемая по всем своим аргументам и 2π-периодическая по t вектор-функция, а отклонения $\tau_1, \dots, \tau_s$ удовлетворяют условию соизмеримости. В терминах правой части этой системы уравнений и характеристик ее линеаризации сформулированы и доказаны условия существования и единственности 2π-периодического решения, описан итерационный процесс построения такого решения, а также указана скорость сходимости итерационного процесса. Для нормы оператора периодических решений удается найти оценку сверху, позволяющую получить условия существования и единственности периодического решения исходной нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений. При этом активно используется теория функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, развитая в работах Л.А. Бекларяна. Важно заметить, что и в этом случае полученные условия сформулированы в терминах правой части системы уравнений и относительно легко могут быть проверены.

Оценивая диссертацию Ф.А. Белоусова в целом, отметим, что в ней предложен новый подход к исследованию периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Этот подход основан на специальной линеаризации правых частей этих систем и на полученных в диссертации оценках операторов периодических решений. При этом автору пришлось активно использовать методы функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений.

Все приведенные в диссертации новые результаты, несмотря на их сложность, четко сформулированы, подробно обоснованы и представляют собой новые достоверные факты теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Работа Ф.А. Белоусова является законченным исследованием высокого уровня, вносящим значительный вклад в развитие этой теории.

Результаты диссертации прошли апробацию на многих конференциях, в том числе международных. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, 2 из которых в журналах, входящих в Перечень ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В диссертации можно имеются опечатки и отдельные неточности изложения, часть из которых перечислена ниже.

На стр. 11 вместо уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_s))$, должно быть уравнение $\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_s))$.

На стр.13 и далее система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме без пояснений называется «обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка».

На стр. 13 и далее без пояснений используются обозначения пространств $\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ и т. п.

На стр. 16 в Теореме 1.1 пропущена фраз «Для любой функции $\xi(t)$».

На стр. 29 вместо L должно быть L_g. Кроме того, сравниваемые здесь константы Липшица определены неоднозначно.

На стр. 38 фразу «размерности всех жордановых клеток при диагонализации равны 1» лучше заменить на стандартный термин «матрица A диагонализуема».

На стр.73 - множество $\{0,1,\dots\}$ имеет стандартное обозначение $\mathbb{Z}_+$.

На стр. 80 указано, что можно применить почленное дифференцирование ряда Фурье функций из пространства $\mathbb{C}^1$, хотя этого условия недостаточно.

На стр. 96 ссылки на формулы (3.7) и (3.11) нужно поменять местами.

Подчеркнем, что приведенные замечания носят редакционный характер и не снижают общей высокой оценки представленной работы.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа Белоусова Федора Анатольевича отвечает требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденным постановлением правительства от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» и 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики
РУДН

Безяев Владимир Иванович

16.10.2014

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3
Кафедра прикладной математики,
Тел. 8-495-955-07-10
E-mail: vbezyaev@mail.ru

Подпись доцента Безяева В.И. заверяю.
Ученый секретарь Ученого Совета РУДН,
профессор

В.М. Савчин